**Лекция 17.**

**Вариационные принципы механики**

*Дифференциальный принцип Даламбера-Лагранжа в декартовых переменных:*

Данный принцип связан с общим уравнением механики, а отсюда сначала необходимо рассмотреть уравнение , в котором рассматривается механическая система из конечного числа материальных точек массы – радиус-вектор точки в некотором репере , , – главные векторы внешних и внутренних активных сил и сил реакций связей, действующих на материальную точку , – изохронная вариация вектора , совместимая с этими связями. Все стесняющие рассматриваемую механическую систему связи выражены равенствами и являются голономными и идеальными.

*Принцип Деламбера-Лагранжа*.

Истинные движения механической системы с голономными идеальными связями, выраженными равенствами, принадлежат тому подмножеству множества всех кинематически возможных движений, для которых сумма элементарных работ всех активных сил и сил инерции на любом кинематически возможном перемещении системы равна нулю в каждый момент времени.

*Дифференциальный принцип Даламбера-Лагранжа в канонических переменных:*

*Вариации скоростей. Вариации канонических переменных*

Рассматриваем голономную механическую систему. Вариацией декартовой скорости *j* -ой точки системы в момент *t* называют бесконечно малую , а - кинематически возможные движения.

- координаты точек системы. Далее получаем

Так как , то , а значит т.е. операторы дифференцирования и вариации перестановочны.

Рассмотрим как функцию лагранжевых координат и скоростей и вычислим ее вариацию в момент *t* как функцию вариаций и :

Дифференцируя равенство по *t*:

.

Используя вышевыведенные формулы, получаем:

Эти уравнения – линейные однородные относительно , а . Поэтому

– независимы. Из последнего уравнения следует, что не являются независимыми от как функции от времени. Также в момент значения и можно рассматривать как независимые величины.

Вариации импульсов можно вычислить, варьируя равенства :

Из этого уравнения получаем, что при любом значения вариаций и можно выбирать независимо.

*Принцип Даламбера-Лагранжа в канонических переменных*

Используем обозначения:

Если все активные силы, действующие на механическую систему, потенциальны, то общее уравнение механики в лагранжевых координатах записывается в следующей форме:

Дифференцируя по *t* и используя , получаем:

Далее, по известным ранее уравнениям, получаем общее уравнение механики в канонических переменных для случая, когда активные силы, действующие на механическую систему, потенциальны:

*Принцип Даламбера – Лагранжа*

Если все активные силы, действующие на механическую систему потенциальны, а ее движения стеснены только голономными идеальными связями, выраженными равенствами, то ее истинные движения принадлежат тому подмножеству множества всех кинематически возможных движений, для которых в каждый момент времени выполняется равенство

Можно получить уравнения Лагранжа II рода из уравнения , а далее гамильтоновы уравнения. Варьируя равенство , получаем:

Подставив это уравнение в , получаем:

Так как при каждом фиксированном *t* вариации можно выбирать независимо, то из последнего уравнения следуют канонические уравнения.

*Функционал и функция действия:*

*Изохронная вариация функционала действия*

Действие – величина – функция Лагранжа механической системы, а , - любое кинематически возможное движение (в обобщенных координатах). Рассмотрим действие как функционал на множестве допустимых движений . – параметры, принадлежащие интервалу , на котором определено движение .

Изохронные вариации – вариации координат, скоростей и функций от них.

Изохронная вариация функционала действия - .

Далее, использовав дифференциальный признак, получаем:

*Полная вариация функционала действия*

Полные вариации координат и скоростей – стремящиеся к 0 величины . Здесь - кинематически возможное движение. Получаем формулы связи полной и изохронной вариации:

Так как , то . Затем, подставив последнюю формулу в и отбросив члены второго порядка малости, получим: Подобным же образом получаем

Использовав две последние формулы, выводим:

Откуда выводится равенство: где

Полная вариация функционала действия - .

Затем получим формулу связи полной и изохронной вариации функционала действия:

Используя , получаем .

Далее, по вышевыведенным формулам получаем формулу полной вариации функционала действия: .

*Функция действия — семейство решений уравнения Гамильтона-Якоби:*

*q* — решение уравнений движения рассматриваемой механической системы. Рассмотрим что совпадает с , , иными словами рассматриваем как функционал действия на множестве истинных движений механической системы. Поступая иначе и полагая, что *q* – определяется начальными и конечным положениями, можно рассматривать величину как функцию параметров , назвав её функцией действия. Положим – параметры, принадлежащие интервалу , на котором определено движение , а также – определена в некотором открытом односвязном множестве

Далее получаем , откуда выводим:

Затем:

Подставляя предпоследнюю формулу в последнюю:

Таким образом функция задаёт параметрическое семейство решений уравнения Гамильтона - Якоби по переменным при значениях параметров , при которых .

*Интегральный принцип наименьшего действия при изохронном варьировании:*

- лагранжевы координаты голономной механической системы, имеющей *s* степеней свободы и находящейся под действием только потенциальных сил. Если – произвольный промежуток времени и то обращается в: .

*Принцип Гамильтона.* Пусть все действующие на механическую систему активные силы потенциальны, а ее движения стеснены только голономными идеальными связями, выраженными равенствами. Тогда истинные движения этой системы, удовлетворяющие условиям принадлежат тому подмножеству множества всех кинематически возможных ее движений, для которых выполнено равенство .

Этот Гамильтона сформулирован и обоснован для случая стационарных связей, а на случай нестационарных связей его обобщил Остроградский. Принцип Гамильтона означает, что среди всех кинематически возможных движений с заданными начальным и конечным положением истинное движение таково, что вычисленная для него изохронная вариация действия равна нулю.

Из принципа Гамильтона для случая интервала следует очевидно аналогичное утверждение с заменой этого интервала на любой его подынтервал. В качестве такого подынтервала используем , а в качестве вариаций координат — величины обращается в 0 при ,. Тогда получаем: , но так как подынтегральная функция больше или меньше нуля на промежутке , то уравнение и уравнения Лагранжа второго рода следуют из независимости .

*Интегральный принцип наименьшего действия при изоэнергетическом варьировании:*

Рассмотрим голономную механическую систему с идеальными связями, имеющую *s* степеней свободы и находящуюся под действием только потенциальных сил. Так же лагранжевы координаты системы связаны с декартовыми координатами стационарными соотношениям и (*H* – гамильтониан). В данном случае , где постоянная энергия принимает своё значение для каждого конкретного движения системы. Отсюда получаем, что

Рассмотрим те кинематические вариации, которые соответствуют , из которого следует где есть функция аргументов . Посчитаем вариации – независимы, а удовлетворяет условию .

Используя , получаем: .

Подставляя последнее уравнение в , получаем: .

В данном случаем , где – квадратичная форма по откуда получаем:

Далее из выводим .

Затем интегрируем это равенство от до :, где – независимые вариации координат, - независимая точечная вариация.

Принцип Эйлера-Лагранжа формулируется как принцип наименьшего действия в терминах полных вариаций и с учетом равенства .

Формула для полной вариации функционала действия: , где – параметры, принадлежащие интервалу , на котором определено кинематически возможное движение Учитывая условия получаем .

Из получаем: , откуда для любого промежутка . Для формулирования принципа Эйлера-Лагранжа остаётся принять, что при вычислении полной вариации действия по Лагранжу величина определяется по формуле при и - в этом случае действие по Лагранжу и равенство не зависят явно от и .

*Принцип Эйлера-Лагранжа:*

Пусть все действующие на механическую систему активные силы потенциальны, ее движение стеснено только голономными идеальными связями, выраженными равенствами, лагранжевы координаты системы связаны с ее декартовыми координатами стационарными соотношениями, а ее гамильтониан не зависит от времени явно. Тогда истинные движения этой системы, удовлетворяющие условиям принадлежат тому подмножеству множества всех кинематически возможных ее движений, для которых выполнено равенство с учетом того, что .

Принцип Эйлера-Лагранжа означает, что среди всех кинематически возможных движений данной механической системы, удовлетворяющих условиям истинное движение таково, что для него полная вариация действия по Лагранжу равна нулю, причем при вычислении вариации действия по Лагранжу величина находится по последней выведенной формуле.